154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
Si $u\in\mathcal{L}(E)$, C_u : polynôme caractéristique.
μ_u : " minimal.

I - Espaces stables [OA]

1) Définitions

Déf 1. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $F\subset E$ un sev de E. On dit que F est stable par u si $u(F)\subset F$.
On note alors $u_{|F}$ l'endomorphisme induit par u sur F et $\bar{u}$ celui induit par u sur E/F.

Lemme 2. On a $C_u = C_{u_{|F}}\cdot C_{\bar u}$

Lecture matricielle. Si F est stable par u, il existe $\mathcal{B}$ base de E dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,u$ est triangulaire par blocs. Réciproquement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,u$ est triangulaire par blocs, il existe un sev stable par u.

Application 3. - C_u irréductible ssi u n'admet pas de sevs stables non triviaux.
- Soit $(u,v)\in\mathcal{L}(E)^2$ tq $rg([u,v])=1$, alors C_u n'est pas irréductible. [G]

2) Recherche

Prop 4. Soit $(u,v)\in\mathcal{L}(E)^2$ tels que $u\circ v=v\circ u$. Alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.
Fondamental, s'applique en particulier à $\boxed{u \text{ et } \mathbb{K}[u]}$.

Exemple 5. - $P=X-\lambda_i$, $\lambda_i\in Sp(u)\to$ stabilité de E_λ
$P=(X-\lambda)^\alpha$, $\alpha=\mathrm{mult}(\lambda,C_u)\to$ stabilité des espaces caractéristiques

Prop 6. $F\subset E$ est stable par u ssi $F^\perp\subset E^*$ stable par ${}^tu$.

Remarque 7. Voir aussi la dernière partie pour la notion d'endomorphisme semi-simple.

II - Réduction des endomorphismes

Prop 8. (Lemme des noyaux). Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. On suppose que $P=Q_1\dots Q_n$, où les Q_i sont premiers entre eux.
Alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(Q_i(u))$

Application 8. ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que u^2 soit diagonalisable. Alors u est diagonalisable ssi $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Ker}\,u^2$

On retrouve aussi des critères de diagonalisabilité et trigonalisabilité...

$u\in\mathcal{L}(E)$	diagonalisable	trigonalisable
ssi	C_u est scindé et $\forall\lambda\in Sp(u)$ $\dim E_\lambda=\mathrm{mult}(\lambda,C_u)$	C_u scindé
ssi	μ_u scindé à racines simples	μ_u scindé.
Ex	$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ $\mu_u=(X-1)(X-2)$	$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ $\mu_u=(X-1)^2$

Thm 9. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tq C_u soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tel que :
(i) d diagonalisable
(ii) n nilpotente
(iii) $d\circ n=n\circ d$, de plus $(d,n)\in\mathbb{K}[u]^2$.
(iv) $u=d+n$
$\boxed{\text{DVP 1}}$
$u=d+n$ est la décomposition de Dunford de u.

Application 9. ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable ssi e^u est diagonalisable.

Pour démontrer Dunford, on utilise des résultats de réduction simultanée.

Prop 10. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Si u et v sont diagonalisables (resp. trigonalisables) alors u et v sont codiagonalisables (resp. cotrigonalisables).

Prop 11. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que C_u scindé à racines simples, $u \circ v = v \circ u$. Alors toute base de diagonalisation de u est une base de diagonalisation pour v.

Application 11. Les solutions dans $M_2(\mathbb{R})$ de $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & 91 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ sont $\left\{ P \begin{bmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 10 \end{bmatrix} P^{-1} \right\}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Thm 12. (Lie-Kolchin). Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors les éléments de G sont cotrigonalisables. $\boxed{\text{DVP 2}}$

Thm 13 (Réduction de Frobenius). Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$. On note $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon : $\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Elle représente un endomorphisme cyclique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $\mathcal{B}$ base de E et des polynômes $P_s | P_{s-1} | \dots | P_1$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}_{P_s} \end{bmatrix}.$$

L'entier s et les polynômes sont uniques.

Remarque 14. Il s'agit d'une version matricielle des invariants de similitude.

III - Géométrie. [GR]

Thm 14. Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$. Il existe des entiers naturels p, q, r tels que $p+q+2r$, des angles $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ ($k \in [\![1, r]\!]$) et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{bmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{bmatrix}, \text{ où } R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$$

Application 14. $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Application 15. Cas de $O_2(\mathbb{R})$. La dimension de E_{-1} caractérise les éléments de $O_2(\mathbb{R})$:

$\dim E_{-1} = 1 \to$ symétrie orthogonale par rapport à E_1.

$\dim E_{-1} = 0$ ou $2 \to$ rotation (éventuellement triviale).

Application 16. Cas de $O_3(\mathbb{R})$. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, $A \neq \pm I_3$.

$\dim E_1 = 1 \to$ rotation d'axe E_1

$\dim E_1 = 2 \to$ réflexion

$\dim E_1 = 0 \to$ composée d'une symétrie et d'une rotation autour de E_{-1}

Exemple 17. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

IV - Sous-représentations

Def 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit semi-simple lorsque $\forall F \subset E$ stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Exemple 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, alors u est semi-simple.

Prop 20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est semi-simple ssi μ_u est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

Contre-ex 20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, $u \neq 0$. u n'est pas semi-simple.

Dans cette partie G désigne un groupe fini, $\dim E = n$.

Déf 21. Une représentation linéaire de G dans E est un homomorphisme $\rho : G \to GL(E)$

- Lorsque ρ est donnée, on dit que E est une représentation de G.
- Le degré de la représentation est $\dim E = n$

Exemples 21. - Soit E un $\mathbb{K}$-ev, alors $\rho : \begin{cases} G \to GL(E) \\ g \mapsto Id_E \end{cases}$ est une représentation linéaire de G (dite triviale).

- Soit $(e_g)_{g\in G}$ une base de E. Le morphisme $\rho : \begin{cases} G \to GL(E) \\ g \mapsto (e_h \mapsto e_{gh}) \end{cases}$ fait de E une représentation de G, appelée représentation régulière de G.

Prop 22. Soient $\rho : G \to GL(E)$ une représentation, et F un sev de E stable sous l'action de G, i.e $\forall g \in G$, $\forall x \in F$, $\rho(g)(x) \in F$. Alors $\rho_F : \begin{cases} G \to GL(F) \\ g \mapsto (x\in F \mapsto \rho(g)(x)) \end{cases}$ est une représentation linéaire de G dans F.

Sous ces hypothèses, on dit que F est une sous-représentation de E.

Exemple 23. - Soit E la représentation régulière de G et $F = \langle x \rangle$ où $x = \sum_{g\in G} e_g$. Alors F est une sous-représentation de E de dimension 1

- $E^G = \{x \in E / \forall g \in G, \rho(g)(x) = x\}$ est une sous-représentation de E, quelque soit E représentation de G.

Thm 24. (Supplémentaire stable). Soient E une représentation de G et F une sous-représentation de E. Alors F admet un supplémentaire F° dans E, qui est stable par G. Autrement dit F° est une sous-représentation de E.

Corollaire 25. Sous les mêmes hypothèses, E est entièrement déterminée par F et F°, et on dit que la représentation E est somme directe des représentations F et F°, $E = F \oplus F^\circ$.

Définition 26. Une représentation E de G est irréductible si $E \neq \{0\}$, et les seuls sous-espaces stables de E par l'action de G sont $\{0\}$ et E. En fait E est irréductible ssi on ne peut pas la décomposer en somme directe de sous-représentations (à part $V = \{0\} \oplus V$).

Exemple 27. Toute représentation de G de degré 1 est irréductible.

Thm 28. (Maschke) Toute représentation de dimension finie est décomposable en somme directe de sous-représentations irréductibles

Remarque 29. Cette décomposition n'est pas unique.

[G] Gourdon, Algèbre [OA] Objectif agrégation, Beck, Malick, Peyré [GR] Algèbre linéaire, Grifone.

Théorème de Lie-Kolchin

Par Erwan Pin

Définition. Un groupe G est résoluble s'il existe une suite $(G_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ avec G_{i+1}/G_i abélien pour tout i.

Proposition. G est résoluble ssi $\exists n \in \mathbb{N}$, $D^n(G) = \{e\}$

Théorème (Lie-Kolchin)**.** Soit G un sous groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors les matrices de G sont simultanément trigonalisables.

On commence par montrer le résultat suivant :

Lemme. Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$ abélien. Alors les matrices de G sont simultanément trigonalisables.

Preuve. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Le cas $n = 1$ est trivial. On suppose que le résultat est vrai pour tout $k \leq n-1$ ($n \geq 2$), et soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ abélien.

Si G ne contient que des homothéties, alors de façon évidente le résultat est vrai. Sinon, soit $A \in G$, qui n'est pas une homothétie, et soient λ une valeur propre de A, V le sous espace propre associé (on a $d = \dim(V) \in \{1, ..., n-1\}$). Alors pour tout $M \in G$ et $v \in V$:

$$A(Mv) = M(Av) = M(\lambda v) = \lambda Mv$$

d'où $Mv \in V$. Ainsi G laisse stable V. On considère alors une base $(e_1, ..., e_d)$ de V que l'on complète en $(e_1, ..., e_n)$ base de $\mathbb{C}^n$, et dans cette base tout élement M de G s'écrivent : $\begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, avec $M_1 \in GL_d(\mathbb{C})$ et $M_2 \in GL_{n-d}(\mathbb{C})$. Les applications $p_1 : M \mapsto M_1$ et $p_2 : M \mapsto M_2$ sont des morphismes de groupe, et $p_1(G) < GL_d(\mathbb{C})$ abélien, $p_2(G) < GL_{n-d}(\mathbb{C})$ abélien. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_1, ..., f_d)$ de $vect(e_1, ..., e_d)$ telle que toutes les matrices M_1 soient triangulaires supérieures. De même, il existe une base $(f_{d+1}, ..., f_n)$ de $vect(e_{d+1}, ..., e_n)$ telle que toutes les matrices M_2 soient triangulaires supérieures. Alors dans la base $(f_1, ..., f_n)$, toutes les matrices de G sont triangulaires supérieures, ce qui conclut la réurrence. □

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Preuve du théorème. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que le théorème soit vrai pour tout $k \leq n - 1 (n \geq 2)$, et soit $G < GL_n(\mathbb{C})$ connexe et résoluble.

Supposons tout d'abord qu'il existe un sous espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$ non trivial (ie distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$), stable par G. Considérant une base de V que l'on complète en une base de $\mathbb{C}^n$, les éléments $M \in G$ s'écrivent dans cette base sous la forme $\begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, avec $M_1 \in GL_d(\mathbb{C})$ et $M_2 \in GL_{n-d}(\mathbb{C})$, où $d = \dim(V) < n$. On considère les applications $p_1 : M \mapsto M_1$ et $p_2 : M \mapsto M_2$. Etant des morphismes de groupes, et comme G est résoluble, on a que $p_1(G)$ et $P_2(G)$ sont résolubles. D'autre part ces applications sont continues, et G est connexe, par conséquent $p_1(G)$ et $P_2(G)$ sont connexes. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux groupes, nous donnant une base dans laquelle tous les M_1 sont co-trigonalisables, de même pour les M_2 avec une autre base. On concatène ces deux bases, formant une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle toutes les matrices de G sont triangulaires supérieures.

A partir de maintenant on supposera qu'il n'existe pas de sous espace vectoriel non trivial stable par G : on dit que G est irréductible. On va montrer qu'alors $n = 1$, ce qui conclura la preuve.

Soit m le plus petit entier non nul vérifiant $D^m(G) = \{I_n\}$ $(G \neq \{I_n\})$. On pose $H = D^{m-1}(G)$, avec la convention que $D^0(G) = G$. Alors $H \neq \{I_n\}$ et H est abélien car $D(H) = D^m(G) = \{I_n\}$. Ainsi par le lemme, les éléments de H sont co-trigonalisables. En particulier, considérant la base commune de trigonalisation, le premier vecteur de cette base est un vecteur propre commun à toutes les matrices dans H.

Remarquons que $H \lhd G$: en effet on a $D^2(G) \lhd D(G) \lhd G$ et $D^2(G)$ est un sous espace caractérisique de $D(G)$, d'où $D^2(G) \lhd G$; par récurrence on obtient facilement que $D^k(G) \lhd G, \forall k$.

Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs propres communs à tous les élements de H. Par ce qui précède on a $V \neq \{0\}$. Soient $v \in V$ et $M \in G$. Alors pour tout $A \in H$: $AM(v) = M(M^{-1}AM)(v)$, avec $M^{-1}AM \in H$ et donc $M^{-1}AM(v) = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi on a $AM(v) = M(\lambda v) = \lambda M(v)$, et donc on a montré que V est stable par G. Par irréductibilité de G, on a $V = \mathbb{C}^n$, ce qui signifie que les éléments de H sont co-diagonalisables.

On va montrer que $H \subset Z_G$. Soit $A \in H$, et considérons l'application $\varphi : M \in G \mapsto M^{-1}AM$. On a $\varphi(G) \subset H$ car $H \lhd G$, ainsi par ce qui précède les matrices dans $\varphi(G)$ sont co-diagonalisables. Ce faisant :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \forall M \in G, (MP)^{-1}AMP = D_M$$

où pour tout $M \in G$, D_M est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux exactement les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de possibilité pour D_M, et donc $\varphi(G)$ est une partie finie de $GL_n(\mathbb{C})$. De plus φ est continue et G est connexe, par conséquent $\varphi(G)$ est connexe. On en déduit que $\varphi(G)$ a au plus un élément, et on sait que $A = \varphi(I_n) \in \varphi(G)$, d'où $\varphi(G) = \{A\}$ et $H \subset Z_G$.

Maintenant, soient $A \in H$ et W un sous espace propre de A. Evidemment $W \neq \{0\}$, et comme A commute avec tous les éléments de G, on obtient que

W est stable par G. Par irréductibilité de G, on a $W = \mathbb{C}^n$, et donc A est une homothétie. Ainsi on a montré que $H \subset \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

A présent raisonnons par l'absurde et supposons que $m > 1$. Alors :

$$H \subset D(G) \subset D(GL_n(\mathbb{C})) = SL_n(\mathbb{C})$$

et donc $H \subset \{\lambda I_n : \lambda^n = 1\}$. Ainsi H est un groupe fini, et de plus il est connexe car le groupe dérivé d'un groupe connexe est encore connexe. Donc H a au plus un élément, et il contient nécessairement I_n, d'où $H = \{I_n\}$, ce qui est absurde (cela contredit la minimalité de m).

Donc on a $m = 1$, d'où $G = H \subset \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{C}\}$, et par irréductibilité de G, on en déduit que $n = 1$, car sinon tout sous espace vectoriel non trivial de $\mathbb{C}^n$ serait stable par G. La preuve du théorème est ainsi terminée. □

Référence(s).

- Antoine Chambert-Loir, Algèbre corporelle, édition éllipses.

① Donner 1 exemple d'un espace stable dont le supplémentaire n'est pas stable ?
CNS pour qu'il y ait un sous espace stable propre dans $Cl_2(\mathbb{R})$ et un supplémentaire stable ?

$\Rightarrow$ diagonalisable.

② M a un sous-espace stable F, $\exp(M)$ a des sous espaces stables ?
M et $\exp M$ commutent donc les $\hat{M}$.

③ $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ $\chi_A(A) = 0 \Rightarrow \chi(A_{|F}) = 0 \Rightarrow \chi_{A_1}(A_1) = 0$.

Donc $\chi_{A_1} | \chi_A$