154 — Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ≥ 2. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note μ_u le polynôme minimal, χ_u le polynôme caractéristique.

I / Généralités

1) Définitions et premières propriétés [OA]

Def 1.1 : F un sous-espace vectoriel de E est stable par u si $u(F) \subset F$

Exs 1.2 : - $\{0\}$ et E sont les sous-espaces stables triviaux.
- $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.
- En particulier si u est une projection dans $\mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{K}$, où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{K}$ sont deux droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$, alors ses sous-espaces stables sont exactement $\{0\}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{K}$ et $\mathbb{R}^2$.

Prop 1.3 : Si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u, ainsi que tout sous-espace propre de v. [GOU]

Cor 1.4 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, comme $P(u)$ commute avec u, alors $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u, en particulier les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont stables par u.

Prop 1.5 : Soit $k \in [\![1, \dim(E)-1]\!]$, alors u stabilise tous les sous-espaces de E de dimension k ssi u est une homothétie. [X-ENS-AL]

2) Dualité et endomorphismes induits

Def 1.6 : On note ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*) : f \mapsto f \circ u$. Pour $F \subset E$, si E n'est pas euclidien on pose $F^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in F, f(x) = 0\}$, sinon on gardera la définition classique de l'orthogonal. [GOU]

Prop 1.7 : Si E n'est pas euclidien, F est u-stable ssi $F^\perp$ est ${}^t u$-stable. Sinon, F est u-stable ssi $F^\perp$ est u^*-stable. [GOU]

Prop 1.8 : Supposons u stable sur F, alors on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_{|F}"] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] & E/F \end{tikzcd}$$

[OA]

Lemme 1.9 : Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F, étendue en une base $\mathcal{B}$ de E ; soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_F$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F})$ et $C = \mathrm{Mat}_{\pi(\mathcal{B}')}(\bar{u})$. De plus $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{\bar{u}}$. [OA]

Rq 1.10 : Réciproquement, une matrice de cette forme fournit un sous-espace stable. Si $B = 0$, alors $E = F \oplus G$, somme directe de sous-espaces stables. [OA]

Prop 1.11 : χ_u irréductible ssi u n'a pas de sous-espace stable non-trivial. [OA]

App 1.12 : Étude du caractère borné des solutions de l'équation de Hill-Mathieu : $y'' + qy = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, π-périodique et paire. [DEV] [Z-Q]

II / Application à la réduction

1) Trigonalisation et diagonalisation par blocs [GOB]

Prop 2.1 : Soit $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k = E$ une suite de sous-espaces stables par u, et $\mathcal{B}$ une base de E telle que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ les premiers éléments forment une base de F_i. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & a_{12} & \cdots & u_{1k} \\ 0 & u_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Et inversement toute matrice triangulaire par blocs met en avant une telle suite de sous-espaces stables.

Prop 2.2 : Si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$, où les E_i sont tous u-stables, alors dans une base $\mathcal{B}$ associée à la somme directe on aura :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & u_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & u_k \end{pmatrix}$$

Inversement une matrice diagonale par blocs offre une telle somme directe de sous-espaces stables.

Thm 2.3 (décomposition des noyaux) : Soit $P = P_1 P_2 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u tel que les P_i soient premiers entre eux deux à deux. Alors : $E = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(u))$.

Cor 2.4 : Si F est u-stable, alors : $F = \bigoplus_{i=1}^{k} (F \cap \mathrm{Ker}(Q_k(u)))$ [OA]

Rq 2.5 : Le corollaire permet, sous certaines conditions, de "transmettre" la propriété de diagonalisabilité par blocs de u à $u_{|F}$

2) Trigonalisation et diagonalisation classique [GOB]

Rq 2.5 : Pour obtenir les énoncés classiques et non par blocs, il suffit de se placer dans les hypothèses du II.1 et supposer $k = n$, et que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dim(F_i) = i$ et $\dim(E_i) = 1$.

Cor 2.6 : u est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

Cor 2.7 : u est diagonalisable ssi on a n droites vectorielles indépendantes et u-stables.

Prop 2.8 : Si u est diagonalisable et F est u-stable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable. [OA]

Prop 2.9 : Si $v \in \mathcal{L}(E)$, alors u et v sont cotrigonalisables si u et v sont trigonalisables et commutent. De plus u et v sont codiagonalisables ssi u et v sont diagonalisables et commutent. [OA]

Thm 2.10 (Lie-Kolchin) : Soit G un sous-groupe résoluble et connexe de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les éléments de G sont co-trigonalisables. [C-L]

3) Décomposition de Dunford [GOB]

Thm 2.11 : Si χ_u est scindé, il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$, avec d diagonalisable et n nilpotent, qui commutent, et tels que $u = d + n$. De plus, d et n sont des polynômes en u.

Rq 2.12 : Ce théorème met en avant une décomposition de E en $\dim(E)$ sous-espaces stables sur lesquels l'expression de u est plus simple.

Prop 2.13 : u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ l'est.

III / Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes cycliques [GOU]

<u>Def 3.1</u> : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{\dim(E)-1}(x))$ soit une base de E.

<u>Def 3.2</u> : Soit $P = X^K + \sum_{i=0}^{K-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on appelle matrice compagnon de P la matrice : $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{K-1} \end{pmatrix}$

<u>Prop 3.3</u> : Si u est cyclique, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{C}(\mu_u)$.

<u>Thm 3.5 (Réduction de Frobenius)</u> : Il existe une suite $F_1, \dots, F_K$ de sous-espaces u-stables tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{K} F_i$, $\forall i \in [\![1, K]\!]$, $u_{|F_i}$ cyclique, $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, si $P_i = \mu_{u_{|F_i}}$ alors $P_{i+1} | P_i$. La suite des $(P_i)_i$ ne dépend que de u, et il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_K) \end{pmatrix}$$

2) Endomorphismes semi-simples [OA]

<u>Def 3.5</u> : u est semi-simple si pour tout sous-espace stable F, il existe un supplémentaire u-stable.

<u>Ex 3.6</u> : Les endomorphismes diagonalisable sont semi-simples.

<u>Prop 3.7</u> : u est semi-simple ssi $\mu_u = P_1 \cdots P_K$, où les $(P_i)_i$ sont irréductibles, unitaires, et distincts deux à deux.

<u>Prop 3.8</u> : Un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi-simple.

<u>Prop 3.9</u> : Si u semi-simple et F u-stable, alors $\bar{u}$ et $u_{|F}$ sont semi-simples.

3) Endomorphismes normaux [GOU]

Ici on suppose E euclidien.

<u>Def 3.10</u> : u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

<u>Prop 3.11</u> : u est normal ssi il est diagonalisable dans une base orthonormale ssi u et u^* sont codiagonalisables dans une base orthonormale.

<u>Thm 3.12</u> : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, u normal, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_K & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \tau_\ell \end{pmatrix}$ où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

[DEV]

IV / Représentations linéaires des groupes finis [ULM]

Ici G désignera un groupe fini, et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

<u>Def 4.1</u> : Une représentation linéaire de G dans E est un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(E)$.

<u>Prop 4.2</u> : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons que pour tout $g \in G$, F est $\rho(g)$-stable, alors ρ induit une sous-représentation : $\rho_{|F} : \begin{array}{l} G \to GL(F) \\ g \mapsto \rho(g)_{|F} \end{array}$.

<u>Def 4.3</u> : Une représentation ρ est dite irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation non-triviale

<u>Prop 4.4</u> : Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\rho_{|F}$ soit une sous-représentation de ρ, alors il existe un supplémentaire G de E tel que $\rho_{|G}$ soit une sous-représentation de ρ.

<u>Thm 4.5 (Maschke)</u> : Toute représentation linéaire est somme directe de représentations irréductibles.

Références :

PLAN :

[GOB] Rémi GOBLOT - Algèbre linéaire : voir "Réduction des endomorphismes"

[GOU] Xavier GOURDON - Algèbre : voir "Dualité", "Réduction d'endomorphismes" et "Espaces euclidiens"

[OA] BECK, MALICK, PEYRÉ - Objectif Agrégation ; voir "Réduction des endomorphismes"

[ULM] Felix ULMER - Théorie des groupes : voir "Représentations linéaires"

PROPOSITIONS / DÉVELOPPEMENTS :

[X-ENS-AL1] FRANCINOU, GIANELLA, NICOLAS - Oraux X-ENS algèbre 1

[Z-Q] ZUILY, QUEFFÉLEC - Analyse pour l'agrégation

[C-L] Antoine CHAMBERT-LOIR - Algèbre corporelle

Réduction des endomorphismes normaux

Arnaud Poinas

9 février 2015

Référence : Xavier Gourdon - *Algèbre*, p.259-260.

Leçons : 154, 155, 160.

Énoncé : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

Avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour tout j.

Preuve : On commence pour cela par démontrer le lemme suivant qui donne la forme des endomorphismes normaux dans une base orthonormale en dimension 2.

Lemme : Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Alors, dans toute base orthonormale B la matrice de u est de la forme

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } b \neq 0.$$

Preuve : Soit B une base orthonormale de E. Commençons par écrire

$$M = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On a $b \neq 0$ car sinon u possèderait a et d comme valeur propre réelle ce qui contredit l'hypothèse initiale. De plus, comme u est normale et que l'on s'est placé dans une base orthonormale alors ${}^tMM = M^tM$ ce qui donne lorsqu'on développe

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$b^2 = c^2 \text{ et } ab+cd = ac+bd$$

. La première assertion entraine $b = c$ ou $b = -c$. Or, si $b = c$ alors M est symétrique et donc diagonalisable ce qui est impossible car M n'a pas de valeur propre réelle donc $b = -c$.
La deuxième assertion, quant à elle, s'écrit maintenant $2(a-d)b = 0$ et comme $b \neq 0$ alors $a = d$ et M est bien de la forme recherchée.

$\square$

Retournons au théorème initial. Afin de le montrer on procède par récurrence sur $n = dim(E)$. Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le au rang n en nous aidant du lemme précédant. Pour cela, distinguons deux cas:

Si u possède au moins une valeur propre réelle λ: Dans ce cas-là, on pose x un vecteur propre de norme 1 associé à cette valeur propre et $F = Vect(x)$. F est stable par u, montrons que F est aussi stable par u^*:

$$\begin{aligned}
< u^*(x) - \lambda x, u^*(x) - \lambda x > &=< u^*(x), u^*(x) > -2\lambda < x, u^*(x) > +\lambda^2 < x, x > \\
&=< x, u(u^*(x)) > -2\lambda < u(x), x > +\lambda^2 < x, x > \\
&=< x, u^*(u(x)) > -2\lambda^2 < x, x > +\lambda^2 < x, x > \\
&=< u(x), u(x)) > -\lambda^2 < x, x > \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $u^*(x) = \lambda x$ donc F est stable par u^*.
Or, on sait que si un espace est stable par un endomorphisme alors l'orthogonal de cet espace sera stabilisé par son adjoint. On a alors:
F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u^*
F stable par $u^* \Rightarrow F^\perp$ stable par $u^{**} = u$
Comme $u_{|F^\perp}$ et $u^*_{|F^\perp}$ commutent et $dim(F^\perp) = n - 1$ alors il existe une base orthonormale B_1 de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|F^\perp}$ est de la forme cherchée par hypothèse de récurrence. $B = \{x, B_1\}$ est donc une base orthonormale de E et $Mat_B(u)$ est bien de la forme recherchée.

Si u ne possède aucune valeur propre réelle: Dans ce cas-là, on pose $P = X^2 + \alpha X + \beta = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ un facteur irréductible (donc $\beta \neq 0$) du polynôme caractéristique de u (avec $\lambda \in \mathbb{C}$). On pose $N = ker(P(u))$. Comme λ est une valeur propre complexe de u alors

$$det(P(u)) = det(u - \lambda Id_E)det(u - \overline{\lambda} Id_E) = 0$$

donc $N \neq \{0\}$. N est clairement stable par u et même par u^* car comme u et u^* commutent alors $u^* \circ P(u) = P(u) \circ u^*$ donc

$$x \in Ker(P(u)) \Rightarrow P(u)(x) = 0 \Rightarrow P(u)(u^*(x)) = 0 \Rightarrow u^*(x) \in Ker(P(u))$$

Comme $uu^*_{|N}$ est symétrique et donc diagonalisable alors il existe $x \in N$ tel que $uu^*(x) = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et on pose $F = vect(x, u(x))$. x et $u(x)$ sont libres (car u ne possède pas de valeur propre réelle) donc $dim(F) = 2$. De plus, $u(u(x)) = u^2(x) = -\alpha u(x) - \beta x$ donc F est stable par u.
Montrons que F est stable par u^*. Pour ça, on remarque que $F = vect(u(x), u^2(x))$ car $u(x)$ et $u^2(x)$ sont libres puisque $\beta \neq 0$. De plus:

$u^*(u(x)) = uu^*(x) = \mu x \in F$
$u^*(u^2(x)) = u^2u^*(x) = \mu u(x) \in F$
Donc F est stable par u^*. Avec le même raisonnement que pour le cas précédant on en déduit que $F^\perp$ est lui aussi stable par u et u^*. Soit B_1 une base orthonormée de F. Comme $dim(F) = 2$ alors d'après le lemme on en déduit que $Mat_{B_1}(u_{|F})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. De plus, $u_{|F^\perp}$ et $u^*_{|F^\perp}$ commutent et $dim(F^\perp) = n - 2$ alors il existe une base orthonormale B_2 de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|F^\perp}$ est de la forme cherchée par hypothèse de récurrence. $B = \{B_1, B_2\}$ est donc une base orthonormale de E et $Mat_B(u)$ est bien de la forme voulue.

$\square$

Equation de Hill-Mathieu

Arnaud POINAS

10 février 2015

Référence : Hervé QUEFFÉLEC , Claude ZUILY - *Analyse pour l'agrégation*, p.412-414.

Leçons : 154, 220.

Énoncé : On s'intéresse au caractère borné des solutions maximales de l'équation:

$$(E) : y'' + qy = 0 \text{ où } q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est continue et } \pi-\text{périodique.}$$

On notera $B = (y_1, y_2)$ la base canonique des solutions de (E) associée à $x_0 = 0$ (c'est à dire que $y_1(0) = y_2'(0) = 1$ et $y_2(0) = y_1'(0) = 0$) et on notera $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$.

1. Si $|T| < 2$ alors toutes les solutions de (E) sont bornées.
2. Si $|T| = 2$ alors (E) possède une solution non nulle bornée.
3. Si $|T| > 2$ alors toutes les solutions non nulles de (E) sont non bornées.

Preuve : On commence par appeler $W = Vect(y_1, y_2)$ l'espace vectoriel des solutions de (E) et on pose $\phi : \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}) & \to & C^0(\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & (x \mapsto y(x+\pi)) \end{array}$ endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$. Montrons que W est stable par ϕ:

$$\begin{aligned} y \in W &\Rightarrow y''(x) + q(x)y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y''(x+\pi) + q(x+\pi)y(x+\pi) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y''(x+\pi) + q(x)y(x+\pi) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \phi(y)'' + q\phi(y) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \phi(y) \in W \end{aligned}$$

Du coup, on peut poser $A = \phi_{|W}$ la restriction de ϕ à W ainsi que $M = Mat_B(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On s'intéresse aux valeurs propres de cet endomorphisme et afin de les déterminer on va calculer son polynôme caractéristique ce qui revient à calculer la trace et le déterminant de A puisqu'on est en dimension 2.
Commençons par expliciter les coefficients de M. On a par choix de la base:

$$\begin{cases} \phi(y_1)(x) = y_1(x+\pi) = ay_1(x) + by_2(x) \\ \phi(y_2)(x) = y_2(x+\pi) = cy_1(x) + dy_2(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En évaluant en 0 on obtient:

$$a = y_1(\pi) \text{ et } c = y_2(\pi)$$

Ensuite, en dérivant puis en évaluant en 0 on obtient:

$$b = y_1'(\pi) \text{ et } d = y_2'(\pi)$$

Ce qui donne:

$$M = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Et donc $Tr(M) = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = T$ et $det(M) = y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_2(\pi)y_1'(\pi)$.
Cherchons une valeur plus simple pour le déterminant. Pour cela, on pose la fonction $\omega = y_1y_2' - y_2y_1'$. En dérivant cette fonction on obtient:

$$\begin{aligned} \omega' &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' \\ &= -qy_1y_2 + qy_1y_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc ω est constant. On a alors $det(M) = \omega(\pi) = \omega(0) = 1$. Le polynôme caractéristique de M est donc $\chi_M = X^2 - TX + 1$ de déterminant $\Delta = T^2 - 4$ ce qui nous donne trois cas.

Si $|T| < 2$: alors M possède deux valeurs propres complexes conjuguées λ et $\overline{\lambda}$ avec $|\lambda| = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}} = \sqrt{det(M)} = 1$. Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres. On a

$$\begin{cases} u_1(x+\pi) = \lambda u_1(x) \\ u_2(x+\pi) = \overline{\lambda} u_2(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc $|u_i(x+\pi)| = |u_i(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 2\}$ donc u_1 et u_2 sont bornés donc toute combinaison linéaire de u_1 et u_2 est bornée donc toute solution de (E) est bornée.

Si $|T| = \pm 2$: alors M possède une valeur propre ± 1 ainsi qu'un vecteur propre associé u vérifiant $u(x+\pi) = \pm u(x)$ pour tout x et donc u est une solution non nulle bornée de (E).

Si $|T| > 2$: alors M possède deux valeurs propres réelles distinctes λ et $\frac{1}{\lambda}$ avec $|\lambda| > 1$. Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres et $y \in W$ une solution non nulle de (E). Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ tels que $y = \alpha u_1 + \beta u_2$.
Si $\alpha \neq 0$ alors on prend un $x \in \mathbb{R}$ tel que $u_1(x) \neq 0$ et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$y(x + n\pi) = \alpha u_1(x + n\pi) + \beta u_2(x + n\pi) = \alpha\lambda^n u_1(x) + \beta\lambda^{-n} u_2(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \pm\infty$$

car $|\lambda| > 1$ donc y est non bornée. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ alors $y = \beta u_2$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_2(x + n\pi) = \lambda^{-n} u_2(x) \Rightarrow \lambda^n u_2(x) = u_2(x - n\pi)$$

donc si on prend un réel x tel que $u_2(x) \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_2(x - n\pi) = \lambda^n u_2(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \pm\infty \text{ car } |\lambda| > 1$$

Donc u_2 n'est pas borné donc $y = \beta u_2$ n'est pas bornée donc toute solution de (E) n'est pas bornée.

$\square$