151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

# I) Théorie de la dimension

## 1) Familles génératrices, libres, bases

[GRI] p.10-14

**Def 1** : Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est dite génératrice si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, ie $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

- Elle est dite libre si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Sinon elle dite liée.
- C'est une base si elle est libre et génératrice, ie $\forall x \in E$, $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$.

**Ex 2** :
* $\{(1,0),(0,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
* Dans $\mathbb{R}^3$, $(1,2,1)$, $(-1,3,1)$ et $(-1,13,5)$ sont liés.
* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
* La famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $E_{ij}$ est la matrice dont le seul coefficient non nul est le coefficient d'indices $i,j$, égal à $1$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Prop 3** : Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

**Prop 4** : Une famille est une base ssi elle est libre de cardinal maximal ssi elle est génératrice de cardinal minimal.

## 2) Espaces vectoriels de dimension finie

[GRI] p.11

**Def 5** : Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.

**Ex 6** : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

[GRI] p.15-16

**Thm 7** : Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie et $G$ une famille génératrice finie. Soit $L \subset G$ une famille libre. Alors il existe une base $B$ telle que $L \subset B \subset G$.

**Thm 8** : Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
- De toute famille génératrice on peut extraire une base.
- Thm de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

[GRI] p.49-50

**Ex 9** : Détermination d'une base par l'algorithme de Gauss : Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs et $A$ la matrice engendrée par ces vecteurs. Soit $A'$ une matrice réduite échelonnée de $A$. Alors les lignes non nulles de $A'$ forment une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Ex : une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,1,0,-1)$, $(-1,1,1,0)$ et $(0,2,1,-1)$ est $((1,1,0,-1),(0,2,1,-1))$.

[GRI] p.17-19

**Lemme 10** : Dans un espace vectoriel engendré par $n$ éléments, toute famille contenant plus de $n$ éléments est liée.

**Thm 11** : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

**Def 12** : Ce nombre est appelé dimension de $E$ sur $\mathbb{K}$, et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

**Ex 13** : $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n+1$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

**Cor 14** : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.
- Toute famille ayant moins de $n$ éléments ne peut être génératrice. Toute famille ayant plus de $n$ éléments est liée.
- Toute famille génératrice ou libre ayant $n$ éléments est une base.

**Ex 15** : $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-n+1))$ est libre et de cardinal $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

[GOU AL] p.260

**App 16** : Démonstrations par récurrence sur la dimension :
Réduction des endomorphismes normaux :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, tel que $f^* \circ f = f \circ f^*$. Il existe une base orthonormée $B$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_r & & \\ & & \tau_1 & \\ & & & \tau_s \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

[GRI] p.18

**Prop 17** : Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} E_p$.

## 3) Sous-espace vectoriel

[GRI] p.19

**Prop 18** : Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ est de dimension finie et :
- $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$
- $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow E = F$

**Def 19** : Soient $E_1, E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
- On appelle somme de $E_1$ et $E_2$ le sous-espace de $E$ défini par $E_1+E_2=\{x_1+x_2 / x_1\in E_1, x_2\in E_2\}$.
- Soit $E=E_1+E_2$. On dit que $E$ est somme directe de $E_1$ et $E_2$ si $E_1\cap E_2=\{0\}$. On note $E=E_1\oplus E_2$.
- $E_1$ et $E_2$ sont dits supplémentaires si $E=E_1\oplus E_2$.

**Prop 20** : $E=E_1\oplus E_2$ ssi pour toute bases $B_1$ de $E_1$ et $B_2$ de $E_2$, $\{B_1, B_2\}$ est une base de $E$.

**Cor 21** : Tout sous-espace vectoriel de $E$ possède un supplémentaire. Il n'est pas unique mais si $E$ est de dimension finie, ils ont tous même dimension.

**Thm 22** : Soit $E$ de dimension finie.
$E=E_1\oplus E_2$ ssi $E=E_1+E_2$ et $\dim E=\dim E_1+\dim E_2$.

**Ex 23** : Dans $\mathbb{R}^3$ soit $\Pi$ un plan vectoriel et $v\notin\Pi$. Alors $\mathbb{R}^3=\Pi\oplus \mathrm{Vect}(u)$.

**Ex 24** : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**Prop 25** : Formule de Grassmann
$\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2)$.

[GRI] p.21.25

### 4) Dimension et applications linéaires

**Prop 26** : Soit $f\in\mathcal{L}(E,E')$ et $\{v_i\}_{i\in I}\subset E$, $E$ un espace vectoriel.
- Si $\{v_i\}$ est libre et $f$ injective, alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est libre.
- Si $\{v_i\}$ est génératrice et $f$ surjective, alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est génératrice.

En particulier, si $f$ est bijective, l'image d'une base est une base.

**Prop 27** : Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

[GRI] p.61

**App 28** : $\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$.

**App 29** : Soit $t\mapsto A(t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue.
L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t)=A(t)Y(t)$ est un espace vectoriel de dimension $n$.

[GOUA] [GRI] p.358 p.66

## II Rang et applications linéaires

### 1) Définitions et théorème du rang

**Def 30** :
- Soit $f\in\mathcal{L}(E,E')$. $f(E)$ est un sous-espace de $E'$, appelé image de $f$, noté $\mathrm{Im} f$. Sa dimension est appelée rang de $f$. On note $\mathrm{rg} f=\dim(\mathrm{Im} f)$.
- On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace qu'ils engendrent.
- On appelle rang de $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de $A$.

**Prop 31** : Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Si $A$ est la matrice de $f$ dans des bases quelconques, alors $\mathrm{rg} f=\mathrm{rg} A$.

[GRI] p.59 p.80

**Rq 32** : On en déduit que deux matrices semblables ont même rang.

**Prop 33** : Soient trois applications linéaires $u:E_1\to E_2$, $f:E_2\to E_3$, $v:E_3\to E_4$. Si $u$ et $v$ sont des isomorphismes alors :
- $f\circ u$ est de rang fini ssi $f$ est de rang fini. Alors $\mathrm{rg}(f\circ u)=\mathrm{rg} f$.
- $v\circ f$ est de rang fini ssi $f$ est de rang fini. Alors $\mathrm{rg}(v\circ f)=\mathrm{rg} f$.

**Thm 34** : Théorème du rang
Soient $E, E'$ deux espaces vectoriels de dimension finie et $f:E\to E'$ une application linéaire. Alors :
$\dim E=\mathrm{rg} f+\dim(\mathrm{Ker} f)$.

**App 35** : Soit $E$ un espace vectoriel de dimension fini et $p$ un projecteur. Alors $E=\mathrm{ker}\, p\oplus\mathrm{Im}\, p$.

**Cor 36** : Soit $f\in\mathcal{L}(E,E')$ avec $E, E'$ de même dimension finie.
Alors $f$ bijective $\Leftrightarrow$ $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective.

[GRI] p.62 p.90 p.63

**App 37** : Polynômes interpolateur de Lagrange
Soient $p\in\mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_p\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
$\varphi:\mathbb{K}_{p-1}[X]\to\mathbb{K}^p$, $P\mapsto(P(a_1),\dots,P(a_p))$ est un isomorphisme. Donc il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\forall i\in[\![1;p]\!]$, $P(a_i)=b_i$, pour $b_1,\dots,b_p\in\mathbb{K}$.

[OA] p.184

### 2) Caractérisation et calcul effectif du rang

**Prop 38** : Soit $A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{rg} A\geq 1$, alors $A$ est équivalente à $J_r=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$, avec $r=\mathrm{rg} A$.

**Cor 39** : $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}({}^tA)$.

[GOUA] p.122

[GOU Al] p.122

Cor 40 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Prop 41 : Le rang de $A$ est le plus grand des ordres des matrices carrées inversibles extraites de $A$.

Prop 42 : Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.

App 43 : Calcul du rang par l'algorithme de Gauss.

Ex : $rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$.

### 3) Formes linéaires

[GRI] p.82

Def 44 : Une forme linéaire sur $E$ est une application linéaire $w : E \to \mathbb{K}$. $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est noté $E^*$ et appelé espace dual de $E$.

Ex 45 : La différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire.

[GOU An] p.317

App 46 : Théorème des extrema liés.
Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, avec $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $(Dg_i(a))_{1\leq i\leq n}$ est libre, alors : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $Df(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Dg_i(a)$.

[GRI] p.82-86

Prop 47 : Soit $E$ de dimension finie $n$. Si $w \in E^*$, $w \neq 0$, alors : $\dim(\operatorname{Ker} w) = n-1$.

On dit que $\operatorname{Ker} w$ est un hyperplan de $E$, déterminé par $w$.

Ex 48 : $\dim\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{Tr}(A) = 0\} = n^2 - 1$.

Prop 49 : Si $E$ est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E^*$.
Donc $E$ et $E^*$ sont isomorphes.

Thm/Def 50 : Soit $E$ de dimension finie $n$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$.
Alors $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, où $\theta_i(e_k) = \delta_{ik}$, est une base de $E^*$.
Elle est dite base duale de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ex 51 : Soient $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,0,-1)$, $e_3 = (0,1,1)$. $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Sa base duale est $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ avec
$\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$ ; $\theta_2(x) = x_2 - x_3$ ; $\theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$.

Prop 52 : $E^{**}$ est canoniquement isomorphe à $E$ en dimension finie : $\phi : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto \phi_x \end{array}$, où $\phi_x : \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ w \mapsto w(x) \end{array}$, est un isomorphisme.

## III Extension de corps et dimension

[GOZ] p.21-22

Def 53 : Soit $k$ un corps. On appelle extension de $k$ tout corps $K$ tel qu'il existe un morphisme de corps $j$ de $k$ dans $K$.
On appelle degré de l'extension $K$ de $k$, noté $[K:k]$, la dimension de $K$ en tant que $k$-espace vectoriel.

Ex 54 : • $[K:k] = 1 \iff k = K$.
• $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 2.
• $\mathbb{F}_{p^n}$ est une extension de $\mathbb{F}_p$ de degré $n$.

Thm 55 : Thm de la base télescopique.
Soient $K$ un corps, $k$ un sous-corps de $K$, $E$ un $K$-espace vectoriel. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E$ en tant que $K$-ev et $(\alpha_j)_{j\in J}$ une base de $K$ en tant que $k$-ev.
Alors $(\alpha_j e_i)_{i\in I, j\in J}$ est une base de $E$ en tant que $k$-ev.

Cor 56 : Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :
(i) $E$ est un $k$-espace vectoriel de dimension finie.
(ii) $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $K$ est un $k$-espace vectoriel de dimension finie.
On a alors : $\dim_k E = \dim_K E \times \dim_k K$.

[GOZ] p.24-33

Def 57 : Soit $K$ une extension de $k$. $a \in K$ est dit algébrique sur $k$ si il existe $P \in k[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$.
On appelle polynôme minimal de $a$ l'unique polynôme unitaire $\Pi_a \in k[X]$ qui engendre l'idéal des polynômes de $k[X]$ annulant $a$.

Thm 58 : $a \in K$ est algébrique sur $k$ ssi $k[a]$ est de dimension finie. On a alors $[k[a]:k] = \deg \Pi_a$.

Ex 59 : Soit $d \in \mathbb{N}$ avec $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $[\mathbb{Q}(\sqrt{d}):\mathbb{Q}] = 2$.


[GRI] : Grifone, Algèbre linéaire, 4è édition
[GOU An] : Gourdon, Analyse, 2è édition
[GOU Al] : Gourdon, Algèbre, 2è édition
[OA] : Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation, 2è édition
[GOZ] : Gozard, Théorie de Galois.

# Réduction des endomorphismes normaux

Référence : Gourdon, Algèbre p 260

> **Théorème** : Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ telle que
>
> $$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad (*)$$
>
> où pour tout $i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout $j$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Lemme 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ un sev de $E$ stable par $u$. Alors $F^\perp$ est stable par $u^*$.

Lemme 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Si $E_\lambda$ est un sous-espace propre de $u$ (associé à une valeur propre $\lambda$), alors $E_\lambda^\perp$ est stable par $u$.

Lemme 3 : Soit $E$ un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles.
Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale de $E$, la matrice de $u$ a la forme

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } b \neq 0.$$

Preuve du théorème :

On procède par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang $n$.

- Si $u$ admet au moins une valeur propre réelle $\lambda$, on pose $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$

Le sev $F = E_\lambda^\perp$ est stable par $u$ et $u^*$ (lemme 1 et 2).

Comme $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$ commutent et que $\dim F \leq n-1$, il existe d'après l'hypothèse de récurrence une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $F$ telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_1} u_{|F}$ a la forme $(*)$

Si $\mathcal{B}_2$ désigne une base orthonormale de $E_\lambda$, on voit alors que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base orthonormale de $E = F \oplus F^\perp$ dans laquelle $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ a la forme $(*)$.

• Sinon $u$ est sans valeur propre réelle.

Soit $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (on a donc $\alpha^2 - \beta < 0$) du polynôme caractéristique de $u$. Soit $N = \operatorname{Ker} Q(u)$.

→ On a $N \neq \{0\}$

En effet, comme $Q$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire $Q = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $M$ la matrice de $u$ dans une base de $E$. Le nombre complexe $\lambda$ est racine de $Q$ et comme $Q$ divise le polynôme caractéristique de $M$, on a $\det(M - \lambda I_m) = 0$.

$\det Q(u) = \det Q(M) = \det(M - \lambda I_m)\det(M - \bar{\lambda} I_m) = 0$

D'où $Q(u)$ n'est pas bijectif donc n'est pas injectif (car dimension finie).

Donc $N = \ker Q(u) \neq \{0\}$.

→ $N$ est stable par $u$ :

Soit $x \in \ker Q(u) = N$. $Q(u(u(x))) = u(Q(u(x))) = 0$ donc $u(x) \in N$.

→ $N$ est stable par $u^*$ :

Soit $x \in N$ $\quad Q(u)(u^*(x)) = u^* Q(u)(x) = u^*(0) = 0$

car $u$ et $u^*$ commutent

→ Posons $v = u_{|N}$. On a $v^* = u^*_{|N}$.

Ainsi l'endomorphisme $v^* v = (u^* u)_{|N}$ est symétrique et admet donc une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in N$ un vecteur propre ($x \neq 0$) associé à $\mu$ : $v^* v(x) = \mu x$

Posons $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$. Comme $u$ n'admet pas de valeur propre réelle, $x$ et $u(x)$ forment une famille libre donc $\dim F = 2$.

. $F$ est stable par $u$ : $x \in N \Rightarrow Q(u)(x) = 0 \Rightarrow u^2(x) - 2\alpha u(x) + \beta x = 0$
$\Rightarrow u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x$ donc $u^2(x) \in F$.

. $F$ est stable par $u^*$ ; $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x$ entraîne $F = \operatorname{Vect}(u(x), u^2(x))$ car $\beta \neq 0$, $Q$ étant irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.

On écrit $u^*[u(x)] = v^* v(x) = \mu x \in F$ et comme $u$ et $u^*$ commutent,
$u^*[u^2(x)] = u \circ u^*(u(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$. Donc $F$ stable par $u^*$.

On peut donc parler de $u_{|F}$.

Comme $(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}$ , $u_{|F}$ est un endomorphisme normal.
D'après le lemme 3, dans une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ de $F$, la matrice de $u_{|F}$ est de la forme $\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

On a vu que $F$ est stable par $u^*$, donc $F^\perp$ est stable par $u$ d'après le lemme 1. Le même lemme montre que $F$ étant stable par $u$, $F^\perp$ est stable par $u^*$. Donc par unicité de l'adjoint. $(u_{|F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$ , ce qui prouve que $u_{|F^\perp}$ est normal.
Comme $\dim F^\perp = n-2 < n$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base $\mathcal{B}_1$ orthonormale de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|F^\perp}$ a la forme $(*)$.
La base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est alors une base orthonormale dans laquelle la matrice de $u$ a la forme $(*)$.

<u>preuve lemme 1</u> : Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$.
Donc $\forall y \in F^\perp$, $0 = (u(x)|y) = (x|u^*(y))$. Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, on a $u^*(y) \in F^\perp$. Or on peut choisir $y$ comme on veut dans $F^\perp$, donc $F^\perp$ est stable par $u^*$.

<u>preuve lemme 2</u> : Soit $x \in E_\lambda$. $u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$
donc $u^*(x) \in E_\lambda$. D'où $E_\lambda$ est stable par $u^*$.
D'après le lemme 1, $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.
<u>preuve lemme 3</u>: Écrivons $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
On a $b \neq 0$ puisque $u$ est sans valeur propre réelle.
Comme $u$ est normal, $M^* M = M M^*$ $\quad (M^* = {}^tM)$.
Parmi les équations découlant de cette égalité, on trouve
$a^2 + c^2 = a^2 + b^2$ et $ab + cd = ac + bd$ (1)
La première assertion de (1) entraine $b = c$ ou $b = -c$.
Si $b = c$, alors $M$ est symétrique, ce qui est impossible puisque $u$ est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$.
La $2^{\text{ème}}$ assertion de (1) s'écrit $2(a-d)b = 0$ et comme $b \neq 0$, on a $a = d$. On en déduit que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

# Théorème des extrema liés.

Référence : Gourdon, Analyse p317 et 327.

**Théorème** : Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
On considère l'ensemble $\Gamma := \{x \in U \mid \forall i \in [\![1,r]\!], g_i(x) = 0\}$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$.

Preuve :

remarque : les $dg_i(a)$ forment une famille libre du dual de $\mathbb{R}^m$ qui est de dimension $m$, donc $r \leq m$. De plus si $r = m$ alors les $dg_i(a)$ forment une base du dual de $\mathbb{R}^m$ et donc le résultat est évident.

Supposons $r \leq m-1$.

On pose $s := m-r$ et on identifie $\mathbb{R}^m$ au produit cartésien $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On utilisera la notation $(x,y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$ pour les éléments de $\mathbb{R}^m$.

Posons $(\alpha, \beta) := a$ ($\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$).

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R}).$$

La famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ étant libre, on a $rg(M) = r$.

Comme le rang de $M$ est égal à la taille de sa plus petite sous-matrice carrée inversible, on peut supposer, quitte à renuméroter les variables, que $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{i,j \in [\![1,r]\!]} \neq 0$.

Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \dots, g_r)$ par $D_y g(a)$ est inversible.
On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à $g$ au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$. Ainsi il existe un voisinage ouvert $U'$ de $\alpha$ dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert $\Omega$ de $\beta$ dans $\mathbb{R}^r$ et une application $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : U' \longrightarrow \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $(g(x,y) = 0 \text{ avec } (x,y) \in U' \times \Omega) \Leftrightarrow (x \in U' \text{ et } y = \varphi(x))$.

En d'autres termes, sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z \text{ tq } g(z)=0\}$ sont de la forme $(x, \varphi(x))$. En particulier on a $\beta = \varphi(\alpha)$.

Posons $h : U' \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x, \varphi(x))$

Comme $h(\alpha) = f(a)$ et que $\forall x \in U', (x, \varphi(x)) \in \Gamma$, $h$ admet un extremum local en $\alpha$ (car $f$ admet un extremum local sur $\Gamma$ en a).

Ainsi, $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \psi)(\alpha)$ où $\psi := (\psi_1, .., \psi_m) : x \longmapsto (x, \varphi(x))$
(ie $\psi = (id_{\mathbb{R}^s}, \varphi)$)

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \; 0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

Or $\forall j \in [\![1, s]\!]$ $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ et $a = \psi(\alpha)$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ (1).

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur $U'$ donc pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ $g_k \circ \psi$ est nulle sur $U'$.
Ainsi (par un calcul similaire) on a :
$$\forall i \in [\![1, s]\!], \; 0 = \frac{\partial g_k \circ \psi}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a). \quad (2).$$

On se donne la matrice,
$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1, m}$$

D'après les relations (1) et (2), les $s$ premières colonnes de A sont combinaisons linéaires de ses $r$ dernières. Or le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes (car $rg\,{}^tA = rg\,A$). Donc les $r+1$ lignes de A sont liées, i-e il existe $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\mu_0 df(a) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i dg_i(a) = 0$
Or $(dg_i(a))_{i \in [\![1, r]\!]}$ est libre donc $\mu_0 \neq 0$ (car sinon tous les $\mu_i$ devraient l'être).
En posant $\lambda_i = \frac{-\mu_i}{\mu_0}$ pour $1 \leq i \leq r$, on en déduit $df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$.