I. Définition et Généralités

On se donne $(G,\cdot)$ un groupe

Définition et proposition 1 (sous groupe engendré par une partie)
Soit A une partie de G. On définit H le sous groupe engendré par A de façon équivalente :
- H est le plus petit sous-groupe au sens de l'inclusion contenant A
- $H = \{s_1 \cdot s_2 \cdots s_{n-1} \cdot s_n \mid n \in \mathbb{N}, (s_i) \in (A \cup A^{-1})^n\}$

Notation 2 : On note $\langle A \rangle$ le sous groupe engendré par A.

Définition 3 : (partie génératrice) Une partie A de G est une partie génératrice de G si $\langle A \rangle = G$. On dit que A engendre G

Remarque 4. Tout groupe G admet G comme partie génératrice

Définition 5 : Une partie génératrice A de G est dite minimale si aucune partie stricte de A n'engendre G.

Exemple 6 : Le groupe libre $F(A)$ sur l'alphabet A a pour partie génératrice minimale A.

Définition 7 (Groupe dérivé). On définit le groupe dérivé par $D(G) = \langle A \rangle$ avec

$$A = \{[x,y] \mid (x,y) \in G^2\}$$

et $[x,y] = x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$ pour $(x,y) \in G^2$ les commutateurs de G.

II. Taille d'une partie génératrice

A. Groupe monogène.

Définition 8 : Un groupe est dit monogène lorsqu'il est engendré par un singleton, i.e. si : $\exists a \in G, G = \langle a \rangle$

Exemple 9 : $\mathbb{Z}$ est monogène car il est engendré par 1.

Remarque 10. Tout groupe monogène est abélien. En effet si $G = \langle a \rangle$, on a :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} = a^m a^n$$

Proposition 11 : Soit G un groupe monogène. Alors :

$$G \cong \mathbb{Z} \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N}^*, G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Définition 12 : Un groupe est cyclique s'il est fini et monogène

Remarque 13 : Par la proposition précédente G est cyclique s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 14 : Si G d'ordre n et $G = \langle g \rangle$, alors les générateurs de G sont les g^k avec $k \wedge n = 1$

Remarque 15 : Le nombre de générateurs d'un groupe cyclique est donc $\varphi(|G|)$ où φ est l'indicatrice d'Euler

Proposition 16 : Un groupe abélien G d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, G est cyclique s'il existe au plus un sous groupe d'ordre d dans G pour tout $d \mid n$.

B. Groupes engendrés par 2 éléments.

Exemple 17 Pour $n \geq 3$. le groupe diédral est engendré par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et une symétrie axiale. Il n'est de plus pas monogène.

Exemple 18 : Pour $n \geq 3$. S_n est engendré par la transposition (12) et le cycle $(12\ldots n)$. Il n'est de plus pas monogène

Exemple 19 : Le groupe libre sur l'alphabet $\{a,b\}$ est engendré par $\{a,b\}$ toutes ses parties minimales ont au moins deux éléments.

Théorème 20 (admis) : Soit G un groupe fini simple, alors G a une partie génératrice à deux éléments.

C. Groupes de type fini

Définition 21 : (Groupe de type fini) On dit que G est de type fini s'il admet une partie génératrice finie.

Contre exemple 22 : Les groupes indénombrables ne sont pas de type fini $(\mathbb{R},+)$ et la variété de $\mathbb{U}$ n'est pas de type fini.

Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications

17/08

Exemple de partie génératrice d'un groupe.
Application
108

Remarque 23 : Toutes les parties génératrices minimales d'un même groupe n'ont pas nécessairement le même cardinal

Exemple 24.
- $\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle = \langle \{2,3\} \rangle$
- $S_n = \langle \{(12),(13),\dots,(1n)\} \rangle = \langle \{(12),(12\dots n)\} \rangle$, $n \geq 4$

Exemple 25 : Certains groupes vérifient tous la même cette propriété :
- Toutes les parties minimales de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ avec p premier sont de cardinal n.
- $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ avec p premier n'a toutes que des parties minimales de cardinal 1

Définition 26 : On dit qu'un élément x d'un groupe G est un superflu s'il n'appartient à aucune partie génératrice minimale de G.

Définition et proposition 27 (Sous groupe de Frattini) : Soit G un groupe fini, on définit de façon équivalente le sous groupe de Frattini, noté $F(G)$ par :
- $F(G)$ est l'intersection des sous groupes maximaux de G
- $F(G)$ est l'ensemble des éléments inutiles de G.

Proposition 28 : Soit G un p-groupe. $F(G)$ est distingué dans G et les parties minimales de G ont un cardinal égal à la dimension de $G/F(G)$ dès lors que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espace vectoriel.

Remarque 29 : Un groupe abélien fini G est également de type fini puisque $G = \langle G \rangle$

Théorème 30 (de structure). Soit G un groupe abélien de type fini. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $d_1, \dots, d_p$ avec $d_1 | d_2 | \dots | d_p$ tels que :

$$G \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z}$$

III. Propriétés géométriques

A. Groupe symétrique

Définition 31. Soit E un ensemble quelconque. On note $S(E)$ et on appelle groupe symétrique de E l'ensemble des permutations de E, i.e. $S(E) = Bij(E,E)$ muni de l'opération de composition.

On appelle groupe symétrique standard d'ordre n le groupe symétrique de $[\![1;n]\!]$. On note $S_n = S([\![1;n]\!])$.

Exemple 32 : La transposition $(ij) \in S_n$, $i,j \in [\![1;n]\!]$ est la permutation qui à i associe j, à j associe i, et à tout autre élément associe lui-même

Définition 33 Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. On appelle orbite de $i \in [\![1,n]\!]$ l'ensemble $Orb_\sigma(i) = \{\sigma^p(i) \mid p \in \mathbb{N}\}$

Exemple 34 : Dans S_5 on a : $Orb_{(34)}(1) = \{1\}$ et $Orb_{(34)}(3) = \{3,4\}$

Définition 35 : Le cycle $(x_1, \dots, x_p) \in S_n$, avec $\forall i \neq j$, $x_i \neq x_j$ est la permutation qui envoie x_i sur x_{i+1} pour $1 \leq i \leq p$, x_p sur x_1 et tout autre élément sur lui-même.

Exemple 36 : Si $\sigma \in S_4 = (1\,2\,4)$ alors, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$, et $\sigma(4) = 1$.

Proposition 37 : Un r-cycle est d'ordre r dans le groupe S_n

Proposition 38 : Toute permutation s'écrit comme un produit de cycles à support disjoints

Proposition 39 : S_n est engendré par les transpositions

Proposition 40 : S_n est engendré par $\{(12), (1\dots n)\}$

B. Groupe alterné

Définition 41 (signature). On définit $\varepsilon_n(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in S_n$ par $\varepsilon_n(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

Proposition 42 La signature est l'unique morphisme non trivial $(S_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \times)$

Définition 43 : On appelle le groupe alterné d'ordre n et on note A_n le noyau du morphisme ε_n

Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications

108

Remarque 44 A_n est engendré par les produits de 2 transpositions.

DEV1

Théorème 45. A_n est engendré par les 3-cycles.

Théorème 46 A_n est simple.

Lemme 47. Soit G un groupe quelconque. Alors le groupe dérivé de G est distingué dans G : $D(G) \triangleleft G$

et le quotient $G/D(G)$ est abélien.

Corollaire 48. Si $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$

C. Groupe linéaire et spécial linéaire

On se donne $\mathbb{K}$ un corps et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n un entier.

Définition 49 On appelle groupe linéaire de E, noté $GL(E)$, le groupe des endomorphismes linéaires inversible de E pour la composition. L'espace des matrices $GL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe (au choix d'une base près) à $GL(\mathbb{K}^n)$

Définition 50. On appelle groupe spécial linéaire de E noté $SL(E)$ le sous groupe de $GL(E)$ des éléments de déterminant 1. On note $SL_n(\mathbb{K})$, les matrices de déterminant 1.

Définition 51 (homologie linéaire). On dit qu'un endomorphisme linéaire inversible est une homologie linéaire si il admet un hyperplan de point fixe.

Définition 52 (dilatation). Une dilatation est une homologie linéaire de déterminant différent de 1. On appelle matrice de dilatation l'ensemble des matrices $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}, \lambda \in \mathbb{K}^*$.

Définition 53 (transvection) Une transvection est une homologie linéaire de déterminant 1. On appel matrice de transvection l'ensemble des matrices $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \neq j$

DEV2

Théorème 54 Les transvections engendrent $SL(E)$

Corollaire 55. Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

~~Corollaire 55. Les transvections~~

Application 56 (Pivot de Gauss) L'algorithme du pivot de Gauss donne une preuve que les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{K})$

Corollaire 57 On a $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ sauf si $(n, \mathbb{K}) = (2, \mathbb{F}_2)$ et $D(SL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ sauf si $(n, \mathbb{K}) = (2, \mathbb{F}_2)$ ou $(n, \mathbb{K}) = (2, \mathbb{F}_3)$

Application 58 $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arc.

Application 59 $\{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ est connexe par arc et $\{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det(M) < 0\}$ est connexe par arc.

Définition 60 : Le groupe projectif spécial (linéaire de E noté $PSL(E)$) est le quotient du groupe $SL(E)$ par son centre. On note $PSL(n, \mathbb{K})$ le quotient de $SL(n, \mathbb{K})$ par son centre.

Remarque 61. Les projections des matrices de transvections engendrent donc $PSL(n, \mathbb{K})$.

Théorème 62 $PSL(n, \mathbb{K})$ est simple sauf dans les cas $(n, \mathbb{K}) = (2, \mathbb{F}_2)$ et $(n, \mathbb{K}) = (2, \mathbb{F}_3)$.

Références :

Ulmer (Dev 1)

Perrin (Dev 2)

Combes

Une aux de math Zavidovique (Frattini).

Développements

1) Simplicité et partie générative de A_n

2) Les transvections engendrent $SL(E)$

/