102

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.

I Le groupe $\mathbb{U}$:

I.1 Généralités :

déf 1 : Le groupe des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} = \ker(\varphi)$

avec $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \\ z \mapsto |z| \end{array}$ morphisme

thm 2 : $\rho : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^* \\ (r, u) \mapsto ru \end{array}$ est un isomorphisme

thm 3 : $\varepsilon : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ x \mapsto \exp(ix) \end{array}$ est un morphisme surjectif

avec $\ker(\varepsilon) = 2\pi\mathbb{Z}$ ainsi : $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}$

I.2 Applications trigonométriques :

déf 4 : $\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Re}(\varepsilon(x)) \end{array}$, $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Im}(\varepsilon(x)) \end{array}$

Ainsi $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$

prop 5 : Formule de Moivre : $\exp(inx) = \cos(nx) + i\sin(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$

prop 6 : Formules d'Euler :
$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\quad \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

appli 7 : Calcul d'intégrales du type :
$\int \cos^n(x)\,dx$ et $\int \sin^n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

appli 8 : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin(t/2)}$$

appli 9 : $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$
$\forall n \geq 1 \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, $T_1 = X$ et $T_0 = 1$

appli 10 : Calcul des noyaux de Diriclet et Fejér.

I.3 Paramétrisation sur le cercle unité :

prop 11 : Chercher les solutions de $x^2 + y^2 = z^2$ $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ revient à chercher $x'^2 + y'^2 = 1$ $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$

thm 12 : $\rho : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{1, 0\} \\ t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} ; \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{array}$ est bijective

appli 13 : $\mathbb{Q} \cap \mathbb{U} \setminus \{(-1, 0)\} = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} ; \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{Q} \right\}$

appli 14 : Les solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$ sont de la forme $(u^2 - v^2 ; 2uv ; u^2 + v^2)$ $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$

I.4 Mesure d'angles orientés :

déf/prop 15 : On muni $\mathcal{A} = \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| = 1\}$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ telle que : $(u, v) \mathcal{R} (u', v')$ ssi $\exists\, r$ une rotation de $\mathcal{S}$ telle que $\begin{cases} r(u) = u' \\ r(v) = v' \end{cases}$ d'où la classe d'équivalence des angles orientés et $\bar{\mathcal{A}}$ l'ensemble des angles orientés

prop 16 : $\phi : \begin{array}{l} \bar{\mathcal{A}} \to SO_2(\mathbb{R}) \\ (u, v) \mapsto \Gamma \end{array}$ avec $\Gamma(u) = v$
est une bijection.

coro 17 : $\varphi : \mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

est surjectif, 2π périodique et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ d'où $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq SO_2(\mathbb{R})$ permet d'établir une mesure des angles orientés de vecteurs

II Structure algébrique de $\mathbb{U}$ et sa torsion :

II 1 Racine n ième de l'unité :

déf 18 : Le groupe des racines n ièmes de l'unité

$$\mu_n = \{ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1 \} = \ker(f_n)$$

avec $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto z^n \end{array}$ morphisme

donc μ_n est un sous groupe de $\mathbb{U}$

thm 19 : μ_n est cyclique et a pour générateurs

$$\rho_k = \exp\left(\frac{2i\pi k}{n}\right) \quad \text{avec : } \begin{cases} k \in [\![0;n-1]\!] \\ k \wedge n = 1 \end{cases}$$

déf 20 : L'ensemble des racine primitives n iemmes est : $\mu_n^{\times} = \{ \exp\left(\frac{2i\pi k}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n \}$

thm 21 : Le seul sous-groupe de $\mathbb{C}$ de cardinal n est μ_n

II 2 Le groupe de torsion de $\mathbb{U}$:

prop 22 : $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x \mapsto e^{2i\pi x} \end{array}$ est un isomorphisme

déf 23 : Soit $(G, +)$ un groupe alors

$$\mathrm{Tor}(G) = \{ x \in G,\ \exists n \in \mathbb{N},\ nx = 0 \}$$

prop 24 : Si un groupe G est abélien alors sa torsion $\mathrm{Tor}(G)$ est un sous-groupe.

prop 25 : $\mathrm{Tor}(\mathbb{U}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

prop 26 : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion

ie : $\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

prop 27 : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible

ie : $\forall x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists y \quad x = ny$

III Applications aux polynômes :

III 1 Polynômes cyclotomiques :

déf 28 : Le n iemme polynôme cyclotomique est :

$$\phi_n(X) = \prod_{\rho \in \mu_n^{\times}} (X - \rho)$$

thm 29 :
- $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$
- ϕ_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et donc dans $\mathbb{Q}[X]$
- $\deg(\phi_n) = \varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}|$
- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(X)$

prop 30 : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

lemme 31 : Soit p premier $a, n \in \mathbb{N}$ tq $p \mid \phi_n(a)$ Alors $p \mid n$ ou $p \equiv 1\ [n]$.

thm 32 : Dirichlet faible :
Il y a une infinité de nombres premiers p tels que : $p \equiv 1 \; [n]$

thm 33 : Wedderburn
Tout corps fini est commutatif

III 2 Contrôle de polynômes quelconques :

déf 34. La hauteur d'un polynôme $f(x) = \sum a_i x^i$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|$ est :
$H(f) = \max_i |a_i|$

lemme 35 : Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$ des zéros de f (avec multiplicité), tels que $\forall i \in [\![1,n]\!]$; $z_i \in \overline{D(0,1)}$
Alors :
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi = \ln |f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \ln |z_k|$$

corollaire 36 : Soit f un polynôme tel que : $f(x) = a_d (x - \alpha_1) \times \dots \times (x - \alpha_d)$
Alors :
La mesure de Mahler de f $M(f)$ est :
$$M(f) = |a_d| \times \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}$$
D'où : $M(f) = \exp\left(\int_0^1 \ln\left(|f(e^{2i\pi t})|\right) dt \right)$

thm 37 : Soit f un polynôme de degré d. Alors :
$$\frac{M(f)}{\sqrt{d+1}} \leq H(f) \leq 2^{d-1} M(f)$$

Références :

[1] Cours de maths 1 algèbre Arnaudiès / Fraysse p 226, 235

[2] Géométrie - Michèle Audin p 74

[3] Cours d'algèbre - Perrin p 82

[4] Algèbre - Gourdon chap 2 partie 5 problème 10

[5] Oraux x-ens algèbre 1 - Francinou, Gianella, Nicolas exercice 4.19

[6] Algèbre, le grand combat - Berhuy chap XII