Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

101

On fixe G un groupe d'unité e, et X un ensemble.

I] Généralités sur les actions de groupes

[ULT] Def 1: Une action à gauche de G sur X est une application $G \times X \longrightarrow X$, $(g,x) \longmapsto g\cdot x$ telle que :
- $\forall g, g' \in G, \forall x \in X,\ g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$
- $\forall x \in X,\ e\cdot x = x$

Si une telle application existe, on dit que G agit sur X, noté $G \curvearrowright X$.

[ULT] Prop 2: La donnée d'une action de G sur X est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow \mathfrak{S}^X$, avec $\rho(g)(x) = g\cdot x$ pour tout $g\in G$ et $x \in X$.

[ULT] Ex 3: - $\mathfrak{S}^X$ agit naturellement sur X via $(\sigma, x) \longmapsto \sigma(x)$. Donc $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [\![1,n]\!]$, $n\in\mathbb{N}$, $GL(V) \curvearrowright V$ où V est un espace vectoriel, $Aut(G) \curvearrowright G$ ...

[CAL] - G agit sur G par translation : $(g,h) \longmapsto gh$; par conjugaison : $(g,h) \longmapsto ghg^{-1}$.

[ULT] Rq 4: Si $G \curvearrowright X$ et $H < G$, alors $H \curvearrowright X$ avec : $H \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} \mathfrak{S}^X$, où i est le morphisme d'injection de H dans G.

[ULT] Def 5: Soient $G \curvearrowright X$ et $x \in X$.
- $\mathcal{O}_x = \{g\cdot x / g \in G\}$ est l'orbite de x dans G, $\mathcal{O}_x \subset X$
- $Stab_G(x) = \{g \in G / g\cdot x = x\}$ est le stabilisateur de x dans G, $Stab_G(x) < G$
- L'action de G sur X est dite fidèle si $Ker(\rho) = \{e\}$, c'est à dire ρ injectif.
- L'action de G sur X est dite transitive s'il n'existe qu'une seule orbite dans X.

[ULT] Rq 6: · On appelle centralisateur de $h \in G$ dans G le stabilisateur de h dans G pour l'action $G \curvearrowright G$ par conjugaison. On le note $Z_G(h) = \{g\in G / gh = hg\}$.
· On appelle normalisateur de $H<G$ dans G le stabilisateur de H dans G pour l'action de G sur l'ensemble des sous groupes de G, par conjugaison.

[ULT] Prop 7: $Ker(\rho) = \bigcap_{x\in X} Stab_G(x)$.

[CAL] Ex 8: · L'action de $\mathfrak{S}^X$ sur X est fidèle et transitive
· L'action $G \curvearrowright G$ par translation est fidèle et transitive
· L'action $G \curvearrowright G$ par conjugaison n'est pas fidèle, ni transitive
· Si $G \curvearrowright X$ et $x \in X$, alors G agit transitivement sur $\mathcal{O}_x$.

[ULT] App 9: (Thm de Cayley) Tout groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

App 10: Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible, et $x_1, \dots, x_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$. Alors $Gal(P/\mathbb{Q})$, le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$, agit fidèlement et transitivement sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ et donc est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Prop 11: Soit $H<G$. Alors $G \curvearrowright G/H$ par multiplication des classes à gauche : $(g, g'H) \longmapsto (gg')H$. Cette action est de plus transitive. [ULT]

App 12: Supposons $|G| = n \in \mathbb{N}$ et $H<G$ tel que $(G:H) = p$, p étant le plus petit nombre premier divisant n. Alors il existe $N \triangleleft G$ avec $\{e\} \subsetneq N \subset H$. En particulier G n'est pas simple. [ULT]

II] Formule des classes et applications

1/ Formule des classes :

Def 13: On définit la relation $\sim$ sur X par : $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}_x$. [ULT]

Prop 14: $\sim$ est une relation d'équivalence sur X dont les classes d'équivalence sont les orbites des éléments de X sous l'action de G. Ainsi ces orbites forment une partitions de X, et : $X = \bigsqcup_{x \in X/\sim} \mathcal{O}_x$. [ULT]

Ex 15: $GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright GL_2(\mathbb{C})$ par conjugaison, et les orbites sont :
$\{P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1} / P \in GL_2(\mathbb{C})\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\{\lambda I_2\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$; $\{P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1} / P \in GL_2(\mathbb{C})\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$.
Celles-ci forment une partition de $GL_2(\mathbb{C})$.

Prop 16: Pour $G \curvearrowright X$ et $x \in X$ on a : $\forall g \in G,\ Stab_G(g\cdot x) = g\cdot Stab_G(x)\, g^{-1}$
En particulier : $\forall g \in G,\ |Stab_G(g\cdot x)| = |Stab_G(x)|$ [ULT]

Prop 17: Pour tout $x \in X$: $|G| = card(\mathcal{O}_x)\,.\,|Stab_G(x)|$ [ULT]

Cor 18: (Formule des classes) Soit $(x_1, \dots, x_r)$ un système de représentant pour la relation $\sim$ sur X. Alors : $card(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|Stab_G(x_i)|}$ [ULT]

App 19: Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{F}_q$ un corps fini. Alors le nombre de matrices diagonalisables de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est : $\sum_{\substack{(n_1 \dots n_q)\\ n_1 + \dots + n_q = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$ [H2G2]

avec $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$.

DVLPT n°1

2/ Points fixes :

[ULM] **Déf 20** : Soit $G \curvearrowright X$. Alors $x \in X$ est un point fixe sous l'action de G si $g.x = x$ pour tout $g \in G$. On pose $X^G := \{x \in X \,/\, \forall g \in G, g.x = x\}$ l'ensemble des points fixes pour $G \curvearrowright X$.

[ULM] **Ex 21** : Le centre de G noté $Z(G) = \{g \in G \,/\, \forall h \in G, gh = hg\}$ est l'ensemble des points fixes sous l'action de G sur lui même par conjugaison.

[ULM] **Prop 22** : (Formule de Burnside) Soit X^g l'ensemble des points fixes de X sous l'action de $\langle g \rangle$. Soit r le nombre d'orbites de X sous l'action de G. Alors $r = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \mathrm{card}(X^g)$.

[ULM] **Déf 23** : Soit p un nombre premier. Un p-groupe est un groupe dont l'ordre de tous les éléments est une puissance de p.

[ULM] **Cor 24** : Soient p un nombre premier et G un p-groupe. Si $G \curvearrowright X$ avec X fini, alors $\mathrm{card}(X^G) \equiv \mathrm{card}(X) \mod p$.

[ULM] **App 25** : • (Thm de Cauchy) Soit G un groupe fini d'ordre divisible par p premier. Alors il existe un élément de G d'ordre p.

• Soit G un p-groupe fini non trivial. Alors $Z(G) \neq \{e\}$, et si $|G| \neq p$, alors G n'est pas simple.

• Un groupe d'ordre p^2 avec p premier est toujours abélien.

3/ Théorèmes de Sylow

[ULM] **Déf 26** : Soient G un groupe fini et p premier. Un p-Sylow de G est un p-sous-groupe de G maximal pour l'inclusion.

[ULM] **Thm 27** : Soient p premier et G un groupe fini d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 1$ et $p \wedge m = 1$.

1/ Les p-sylows de G sont les sous groupes d'ordre p^α de G

2/ Les p-sylows sont tous conjugués

3/ Soit n_p le nombre de p-sylows de G. Alors $n_p = (G : N_G(P))$ pour tout P p-sylow de G, et : $n_p \mid m$; $n_p \equiv 1 \mod p$.

[ULM] **Cor 28** : Si P est le seul p-Sylow de G, alors $P \lhd G$.

App 29 : • A isomorphisme près, il n'y a que 5 groupes d'ordre 12 : $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, D_6, A_4, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ [ULM]

• A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

III Applications :

1/ Actions sur des espaces de matrices :

Soit K un corps.

Prop 30 : $GL_n(K)$ agit par conjugaison sur $M_n(K)$ avec $\begin{array}{rcl} GL_n(K) \times M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ (P, M) & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ [GOU]

Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

App 31 : Deux matrices semblables ont la même réduction de Frobenius, les mêmes invariants de similitude. [GOU]

Prop 32 : $GL_n(K) \times GL_m(K)$ agit sur $M_{n,m}(K)$ avec $\begin{array}{rcl} (GL_n(K) \times GL_m(K)) \times M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ ((P, Q), M) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array}$ [GOU]

Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

App 33 : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. [GOU]

• $(J_r)_{0 \leq r \leq \min(n,m)}$ est un système de représentants pour cette action, où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Prop 34 : $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par congruence : $\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ (P, S) & \longmapsto & PS{}^tP \end{array}$ [GOU]

App 35 : Classification des formes quadratiques réelles. [GOU]

2/ Groupe des isométries

Déf/Prop 36 : $\mathrm{Isom}(X)$ (respectivement $\mathrm{Isom}^+(X)$) est le groupe des isométries (respectivement positives) de l'ensemble X. Il agit naturellement sur X. [ALE]

Ex 37 : • D_n est le groupe des isométries d'un polygône régulier à n côtés. [ALE]

D_n agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble des sommets du polygône.

En particulier : $D_3 \simeq S_3$.

• Soit T un tétraèdre régulier, $T \subset \mathbb{R}^3$. Alors $\mathrm{Isom}(T) \simeq S_4$ et $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq A_4$.

[ULM] Prop 38 : Soit $G < SO_3(\mathbb{R})$ fini et non trivial. Alors G est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, A_4, S_4 ou A_5 avec $n \geq 2$.

[ULM] App 39 : Il n'y a que 5 polyèdres réguliers, à similitude près, appelés "solides de Platon".

3/ Espaces projectifs

[ULM] Prop 40 : Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors l'action naturelle de $GL(V)$ sur V induit une action de $GL(V)$ sur $\mathbb{P}^1(V)$: $GL(V) \times \mathbb{P}^1(V) \to \mathbb{P}^1(V)$, $(g, v) \mapsto g(v)$.
Elle même induit une action de $PGL(V)$ sur $\mathbb{P}^1(V)$, et $PSL(V)$ sur $\mathbb{P}^1(V)$, cette dernière étant fidèle et transitive.

[ULM] App 41 : $PSL(2,2) \simeq S_3$; $PSL(2,3) \simeq A_4$; $PSL(2,4) \simeq A_5$.

[HH66] Def 42 : Soit $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \,/\, Im(z) > 0\}$, appelé demi-plan de Poincaré. On appelle droite hyperbolique de $\mathcal{H}$ les demi-cercles épointés de $\mathcal{H}$ dont le centre est réel, et les demi-droites épointées parallèles à $i\mathbb{R}_+^*$. On note D_h l'ensemble des droites hyperboliques de $\mathcal{H}$.

[HH66] Prop 43 : (Action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré)
1/ $PSL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}$.
2/ $PSL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur D_h.
DVLPT n° 2

4/ Représentations

A partir de maintenant G est un groupe fini, et V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

[SER] Def 44 : Une représentation linéaire de G sur V est la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$, c'est donc une action de G sur V.
. On appelle degré de la représentation ρ la dimension de l'espace vectoriel V.

[SER] Ex 45 : . $\rho : \begin{vmatrix} G \to GL(V) \\ g \mapsto id_V \end{vmatrix}$ est une représentation linéaire de G, appelée représentation triviale.
. Si $G \curvearrowright X$ un ensemble fini, et si V est un espace vectoriel de base $(e_x)_{x \in X}$, alors $\rho : \begin{vmatrix} G \to GL(V) \\ g \mapsto (e_x \mapsto e_{gx}) \end{vmatrix}$ est une représentation de G, appelée représentation par permutation.

Déf/Prop 46 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation, et soit $W \subset V$ un sous espace vectoriel stable sous l'action de G. Alors $\rho_W : \begin{vmatrix} G \to GL(W) \\ g \mapsto \rho(g)_{|W} \end{vmatrix}$ est une représentation de G, et on dit que W est une sous-représentation de V. [SER]
. Une représentation V de G est irréductible si ses seules sous représentations sont $\{0\}$ et V.

Ex 47 : Soit T un tétraèdre régulier. Alors l'action de $Isom(T) \simeq S_4$ sur l'ensemble des sommets de T induit une représentation $\rho : S_4 \to GL(\mathbb{C}^3)$ de degré 3 de S_4, et elle est irréductible. [RAU]
. De même le groupe des isométries positives du cube (isomorphe à S_4) agit sur l'ensemble des diagonales du cube et induit une autre représentation irréductible de degré 3 de S_4.

Thm 48 : (Maschke) Toute représentation V de G, de dimension finie, est décomposable en somme directe de sous représentations irréductibles. [SER]

Rq 49 : Cette décomposition n'est pas unique.

Def 50 : On appelle caractère de la représentation ρ la fonction $\chi : \begin{vmatrix} G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto Tr(\rho(g)) \end{vmatrix}$ [SER]
. Un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.

Ex 51 : Si ρ est la représentation par permutation induite par $G \curvearrowright X$, alors pour tout $g \in G$ on a $\chi(g) = card(X^g)$ [SER]

Def 52 : Deux représentations $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : V \to V'$ tel que : $\forall g \in G$, $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$. [SER]

Prop 53 : Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère. [SER]

Def 54 : Soit $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$. Alors : [SER]
$\varphi, \psi \in \mathcal{F}(G,\mathbb{C}) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$ est un produit hermitien sur $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$.

Prop 55 : . Un caractère χ est irréductible si et seulement si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ [SER]
. Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ constantes sur les classes de conjugaison de G (appelées fonctions centrales).

Cor/Def 56 : Il y a autant de classes de conjugaison de G que de caractères irréductibles. On appelle table de caractères une matrice carrée de coefficients les valeurs des caractères irréductibles sur chacune des classes de conjugaison de G. [SER]

Ex 57 : Table de caractères de S_4. (Annexe 1) [SER]

Annexe 1 : Table de Caractères de S_4.

S_4	id	(1,2)	(1,2,3)	(1,2,3,4)	(1,2)(3,4)
1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	-1	0	1	-1
χ_3'	3	1	0	-1	-1

Références :

[ULM] : Théorie des groupes, Felix Ulmer.

[CAL] : Éléments de théorie des groupes, Josette Calais.

[HHGG] : Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

[GOU] : Algèbre, Gourdon.

[ALE]. Thèmes de Géométrie, Groupes en situation géométrique. Michel Alessandri.

[SER] : Représentations linéaires des groupes finis, Jean-Pierre Serre

[RAU]. Les groupes finis et leurs représentations, Gérard Rauch